Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014, Rabat, Maroc

Filière DEUG :
Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques II
Cours d'Algèbre II

Par
BENLARBI-DELAI M'HAMMED
JABBOURI ELMOSTAFA
LBEKOURRI ABOUBAKR

Année 2006-2007

Table des matières

Chapitre 1

Structures algébriques

1.1 Groupes

Définition 1.1.1 .

1. *Une loi de composition interne sur un ensemble* E *est une application de* $E \times E$ *dans* E*. Si* f *est une telle application, on appelle* $f(x, y)$ *le composé de* x *et* y *et on convient de noter* $f(x, y) = x * y$, xTy*.... Un ensemble* E *muni d'une loi interne* $*$ *est noté* $(E, *)$.
2. *On appelle loi de composition externe sur* E*, de domaine de scalaires l'ensemble* A*, une application de* $A \times E$ *dans* E.

Exemples 1.1.2 .

1. *L'addition et la multiplication sont des lois internes dans* $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$, Z, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
2. *Si* E *est un ensemble, les opérations* $\cap$ *et* $\cup$ *sont des lois internes dans* $\mathcal{P}(E)$.
3. *Soient* E *un ensemble et* $\mathcal{A}(E, E)$ *l'ensemble des applications de* E *dans* E*. La composition des applications est une loi interne dans* $\mathcal{A}(E, E)$.
4. *La multiplication par un réel est une loi de composition externe dans* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$.

Définition 1.1.3 . *On dit qu'un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un groupe si :*

1. *$*$ est associative :* $\forall a, b, c \in G \quad a*(b*c) = (a*b)*c$.
2. *$*$ posséde un élément neutre (G est donc non vide) :* $\exists e \in G, \quad \forall a \in G, \quad a*e = e*a = a$.
3. *Tout élément posséde un symétrique pour $*$:* $\forall a \in G, \quad \exists a' \in G, \quad a*a' = a'*a = e$.

Si, de plus, la loi $*$ est commutative, càd pour tout $a, b \in G$ $a*b = b*a$; on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif, ou plus souvent, un groupe abélien.

Notations 1.1.4 *On emploie en général la notation $a.b$, ou plus simplement ab au lieu de $a*b$. On dit alors que le groupe est noté multiplicativement . e est alors noté 1_G ou simplement 1, le symétrique a' de a est noté a^{-1} et appelé inverse de a. Les relations de définition d'un groupe s'écrivent alors :*

$$a(bc) = (ab)c, \quad a1 = 1a = a, \quad aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

On emploie aussi, la notation $a+b$ au lieu de $a*b$, dans le cas où la loi est commutative et on dit que le groupe est noté additivement. e est alors noté 0, le symétrique de a est noté $-a$ et est appelé l'opposé de a. Les relations ci-dessus s'écrivent alors :

$$a+(b+c), \quad a+0 = 0+a = a, \quad a-a = a+(-a) = -a+a = 0.$$

Pour $a \in G$ et $n \in Z$, on écrit :
Si le groupe est noté multiplicativement :

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a...a}_{n} & si \quad n > 0 \\ 1 \quad si \quad n = 0 \\ \underbrace{a^{-1}...a^{-1}}_{n} & si \quad n < 0 \end{cases}$$

On peut alors vérifier qu'on a :

$$\forall a \in G, \ \forall m, n \in Z, \quad a^m a^n = a^{m+n} \ \text{ et } \ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Si le groupe est noté additivement :

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + ... + a}_{n} & si \quad n > 0 \\ 0 \quad si \quad n = 0 \\ \underbrace{(-a) + ...(-a)}_{-n} & si \quad n < 0. \end{cases}$$

On peut alors vérifier qu'on a :

$$\forall a \in G, \ \forall m, n \in Z, \quad ma + na = (m+n)a, \quad m(na) = (mn)a.$$

Exemples 1.1.5 .

1. $(Z, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*_+, .)$, $(\mathbb{Q}^*_+, .)$, $(\{-1, 1\}, .)$ *sont des groupes abéliens.*
2. *Soit* E *un ensemble et* Δ *la différence symétrique définie sur* $\mathcal{P}(E)$ *par* $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, *pour tout* $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ *et où* $A \setminus B = \{x \in E : \ x \in A \ et \ \ x \notin B\}$. *Alors* $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ *est un groupe abélien.*
3. $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{$*matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{R}\}$ *muni de l'addition des matrices est un groupe abélien.*
4. $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad : \quad detA \neq 0\}$ *muni de la multiplication des matrices est un groupe abélien.*
5. *Soit* $E \neq \emptyset$ *et* $\mathcal{S}_E$ *l'ensemble des bijections de* E *dans* E. *Alors* $\mathcal{S}_E$ *muni de la composition* $\circ$ *des applications est un groupe. C'est le groupe symétrique de* E. *Si* $E = \{1, 2, ...n\}$, *on le note* $\mathcal{S}_n$.

Sous-groupes :

Définition 1.1.6 . *Soit* G *un groupe noté multiplicativement, et* H *une partie non vide de* G. *On dit que* H *est un sous-groupe de* G *si :*

1. H *est stable (i.e* $\forall x, y \in H, \ xy \in H$*).*
2. H *muni de la loi induite a une structure de groupe.*

Proposition 1.1.7 . *Soit* G *un groupe noté multiplicativement et* H *une partie de* G, *les trois propositions sont équivalentes :*

1. *H est un sous-groupe de G.*
2. $H \neq \emptyset, \quad \forall x, y \in H, \quad xy \in H; \quad \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H.$
3. $H \neq \emptyset, \quad \forall x, y \in H, \quad xy^{-1} \in H.$

Démonstration. On a évidemment (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3). Démontrons donc (3) $\Longrightarrow$ (1), ce qui démontrera l'équivalence des trois propriétés.
Comme $H \neq \emptyset$, soit $x \in H$ et prenons $x = y$ dans (3) ; alors $xx^{-1} = 1 \in H$. De même en prenant $x = 1, \ y = x$ dans (3) on a $1x^{-1} = x^{-1} \in H$. Aussi $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. Ainsi H est stable. Les axiomes de groupes se vérifient alors immédiatement.

Exemples 1.1.8 .

1. *$(\mathbb{Q}, +)$ est un sous-groupe de $(\boldsymbol{R}, +)$, $\{a + b\sqrt{2} \quad : a, b \in Z\}$ est un sous groupe de $(\boldsymbol{R}, +)$.*
2. *Soit G un groupe, G et $\{1\}$ sont des sous-groupes de G. Un sous-groupe distinct des deux précédents, s'il existe, est appelé sous-groupe propre de G.*
3. *Soit G un groupe et notons $Z(G) = \{a \in G \quad : \forall b \in G, \quad ab = ba\}$. $Z(G)$ est un sous-groupe de G appelé centre de G. $Z(G)$ est nécéssairement abélien en tant que groupe.*
4. *Une partie H de Z est un sous-groupe si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = nZ = \{na \quad : a \in Z\}$.*
   En effet, si $H = \{0\}$, alors $n = 0$; supposons que $H \neq \{0\}$. Il existe un plus petit élément $n > 0$ appartenant à H ($H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$ car si $x \in H$, $-x \in H$). Puisque $n \in H$ et H est un sous-groupe on a bien $nZ \subset H$. D'autre part, si $m \in H$, on peut écrire :
   $$m = nq + r, \quad q \in Z, \quad 0 \leq r < n$$
   mais $m - qn \in H$, donc $r \in H$, ce qui entraîne $r = 0$ puisque n est le plus petit entier strictement positif et appartenant à H, donc $H = nZ$.
5. *L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $GL_n(\boldsymbol{R})$.*

Propriétés 1.1.9 .

1. *Si G est un groupe, $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G, alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G. En particulier si $G = Z$, $H_1 = n_1Z$,...,$H_k = n_kZ$; alors $\bigcap_{i=1}^{i=k} n_iZ$ est un sous-groupe de Z, il est donc de la forme mZ avec $m \in I\!N$. On peut vérifier facilement que m est le ppcm de $n_1, ..., n_k$.*
2. *Il est à noter que la réunion de deux sous-groupes n'est un sous-groupe que si l'un d'entre eux est inclus dans l'autre.*
3. *L'ensemble des puissances a^n de a, $n \in Z$, est un sous-groupe de G. C'est le plus petit sous-groupe de Z qui contient a et est appelé sous-groupe engendré par a.*

Homomorphismes de groupes :

Définition 1.1.10 . *Soient G, G' deux groupes, f une application de G dans G'. On dit que f est un homomorphisme de G dans G' si :*

$$\forall x, y \in G, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Si de plus f est bijectif, on dit que f est un isomorphisme de groupes, si $G = G'$ on dit que f est un endomorphisme de G ; un endomorphisme bijectif s'appelle un automorphisme. On appelle noyau de f, et on note $Kerf$, l'ensemble :

$$Kerf = \{x \in G \quad : f(x) = 1_{G'}\}.$$

On note aussi Imf l'ensemble $f(G)$, on a :

$$Imf = \{y \in G' \ / \ \exists x \in G, \quad y = f(x)\}.$$

Exemples 1.1.11 .

1. *a étant un élément du groupe G, l'application $x \to a^{-1}xa$ de G dans G est un homomorphisme.*
2. *Soit G un groupe noté multiplicativement et $x \in G$. L'application $n \to x^n$ est un homomorphisme de Z dans G.*

Proposition 1.1.12 . *Soient G et G' deux groupes et f un homomorphisme de G dans G'. On a les propositions suivantes :*

1. *f(1)=1.*
2. $\forall x \in G, \quad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
3. *L'image de tout sous-groupe de G est un sous-groupe de G'. En particulier Imf est un sous-groupe de G'.*
4. *L'image réciproque d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G. En particulier $Kerf$ est un sous-groupe de G.*
5. *f est injective si et seulement si $Kerf = \{1\}$.*

Démonstration. 1) découle immédiatement de l'égalité $f(1)f(1) = f(1.1) = f(1) = f(1).1$. 2) Pour tout $x \in G$ on a $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1})f(x) = f(1) = 1$. 3) Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H) \neq \emptyset$ car $1 = f(1 \in f(H)$; de plus pour tout $f(h)$ et $f(h') \in f(H)$ on a $f(h)(f(h'))^{-1} = f(h)f(h'^{-1}) = f(hh'^{-1}) \in f(H)$. 4) idem que dans 3). 5) Supposons que $Kerf = \{1\}$ et soient $x, y \in G$ tels que $f(x) = f(y)$. Il en résulte que $f(x)(f(y))^{-1} = 1$ càd $f(xy^{-1}) = 1$ et $xy^{-1} \in Kerf$, d'où $x = y$ et f est injective. Inversement, si f est injective et $x \in Kerf$; on a $f(x) = 1 = f(1)$ et par suite $x = 1$.

Groupes symétriques :

On a déja vu que l'ensemble des applications bijectives $\mathcal{S}(E)$ d'un ensemble dans lui même constitue un groupe pour la composition des applications (notée $\circ$). On désigne par $\mathcal{S}_n$ cet ensemble si $E = \{1, ..., n\}$, et on appelle ses éléments des permutations. On convient d'écrire si $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ...n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ...\sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on emploie plutôt la notation multiplicative : $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est notée $\sigma_1\sigma_2$.
On appelle transpostion toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ pour laquelle il existe deux éléments distincts i, j de $\{1, ..., n\}$ tels que $\sigma(i) = j, \ \sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour tout $k \neq i, j$. Si

l'on note $\tau_{i,j}$ cette transposition, on a :

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & ... & j & ...n \\ 1 & 2 & j & ... & i & ...n \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\tau_{i,j}\tau_{i,j} = id_E$, càd que $\tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j}$.

Propriétés 1.1.13 .

1. *Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme produit fini de transpositions. A titre d'exemple, dans $\mathcal{S}_5$, la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ peut s'écrire $\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,5}\tau_{5,4}$. La précédente écriture n'est pas unique. Mais la parité du nombre de transpositions figurant dans toute décomposition d'un élément $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est la même.*
2. *La signature d'une permutation σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, est l'application $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ définie par $\varepsilon(\sigma) = 1$ si la permutation σ est produit paire de transpositions et $\varepsilon(\sigma) = -1$ sinon. La signature ε est un homomorphisme de groupes càd $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ pour toutes permutations σ, τ.*
3. *Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(I\!K)$, le déterminant de A est donné par la formule :*

$$detA = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} ... a_{n,\sigma(n)}.$$

Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_3(I\!K)$, on a :

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

en tenant compte du fait que $\mathcal{S}_3 = \{Id, \tau_{1,3}\tau_{3,2}, \tau_{1,2}\tau_{2,3}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}\}$.

1.2 Anneaux

Définition 1.2.1 . *On dit qu'un ensemble A muni de deux lois de composition internes $+$ et . est un anneau si :*

1. *$(A, +)$ est un groupe abélien.*

2. *La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition + :*

$$x(yz) = (xy)z, \ x(y+z) = xy + xz \text{ et } (y+z)x = yx + zx.$$

Si de plus la multiplication est commutative on dit que A est un anneau commutatif. S'il existe un élément neutre , noté 1_A, pour la multiplication, A est dit unitaire.

Remarques 1.2.2 .

1. *Sauf mension explicite du contraire, tous les anneaux considérés par la suite sont supposés être unitaires.*
2. *Si A est un anneau, alors $1_A \neq 0$, sauf si $A = \{0\}$.*

Exemples 1.2.3 .

1. *$(Z, +, .)$ est un anneau commutatif, l'élément unité étant 1. De même $(Z/nZ, +, .)$ est un anneau commutatif fini à n éléments, l'élément unité est $\overline{1}$.*
2. *$\mathbb{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs.*
3. *$\mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R}) = \{$matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\boldsymbol{R}\}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau.*
4. *Si A, B sont deux anneaux, $A \times B$ est un anneau pour les lois produits, l'élément unité est $(1_A, 1_B)$.*
5. *$(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. L'élément unité est E.*

Régles de calcul dans un anneau. :

Si A est un anneau, alors :

1. $x(y - z) = xy - xz, \quad (y - z)x = yx - zx.$
2. $0x = x0 = 0, \quad x(-z) = -xz = (-xz).$
3. Formule du binôme.
   On remarque que $(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$ en général. Mais si x et y commutent ($xy = yx$), alors on a :

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + ... + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Sous-anneaux

Définition 1.2.4 . *Soit $(A, +, .)$ un anneau et B une partie de A. On dit que B est un sous-anneau de A si :*

1. *B est stable pour les deux lois + et ..*
2. *$1_A \in B$.*
3. *B muni des deux lois induites + et . a une structure d'anneau.*

Proposition 1.2.5 . *Soit $(A, +, .)$ un anneau et B une partie de A. B est un sous-anneau de A si et seulement si*

1. *$\forall a, b \in B \quad a - b \in B$.*
2. *$1_A \in B$.*
3. *$\forall a, b \in B \quad ab \in B$.*

Homorphismes d'anneaux :

Définition 1.2.6 . *Soient A et B deux anneaux et $h : A \to B$ une application. On dit que h est un homomorphisme d'anneaux si :*

1. *$\forall x,\ y \in A \quad h(x + y) = h(x) + h(y)$.*
2. *$\forall x,\ y \in A \quad h(xy) = h(x)h(y)$.*
3. *$h(1) = 1$.*

Si de plus, h est bijective, on dit que h est un isomorphisme d'anneaux.

Remarques 1.2.7 .

1. *Un homomorphisme h d'anneaux est en particulier un homomorphisme de groupes. C'est ainsi que l'image $h(A')$ d'un sous-anneau A' de A est un sous-groupe qui contient 1 en vertu de (3). De plus $h(A')$ est stable pour la multiplication d'après (2), ce qui fait de $h(A')$ un sous-anneau de B.*

2. *L'ensemble* $\mathcal{J} = \{x \in A \ / \ h(x) = 0\}$, *qui n'est autre que le noyau de* h, *est un sous-groupe de* A *qui posséde la propriété particulière :* $\forall x \in \mathcal{J}, \quad \forall a \in A, \quad xa \in \mathcal{J}$ *et* $ax \in \mathcal{J}$, *puisque* $f(xa) = f(x)f(a) = 0$ *et* $f(ax) = f(a)f(x) = 0$. *Un sous-groupe* $\mathcal{J}$ *d'un anneau* A *qui vérifie une telle propriété s'appelle un idéal bilatère de* A.

Exemples 1.2.8 .

1. *Soit* P *une matrice carrée inversible et* $h : (M_n(\boldsymbol{R}), +, .) \to (M_n(\boldsymbol{R}), +, .)$, *l'application qui fait correspondre à* A, *la matrice* PAP^{-1}. h *est un automorphisme de* $M_n(\boldsymbol{R})$, *appelé l'automorphisme de changement de bases.*
2. *Soit Aun anneau et* h *l'application*

$$h : Z \to A$$

$$n \to n.1_A$$

est un homomorphisme d'anneaux. h *est injectif si et seulement si* $Kerh = \{0\}$ *et dans ce cas* $h(Z) = \{m.1_A, \ m \in Z\}$ *est isomorphe à* Z. *Si* h *n'est pas injectif, alors il existe* $n > 0$ *tel que* $Kerh = nZ$. *L'entier* n *s'appelle la caractéristique de* A.

1.3 Corps

Définition 1.3.1 . *On dit qu'un ensemble* $I\!K$ *muni de deux lois de composition internes + et . est un corps si :*

1. $(I\!K, +, .)$ *est un anneau,* $1_K \neq 0$.
2. $\forall x \in I\!K^*, \quad \exists x' \in I\!K, \quad xx' = x'x = 1_K$.

Si de plus, la multiplication est commutative, on dit que $I\!K$ *est un corps commutatif.*

Remarques 1.3.2 .

1. *Si* $I\!K$ *est un corps,* $I\!K^*$ *muni de la multiplication est un groupe. Et ainsi,* $I\!K$ *est commutatif si et seulement si* $I\!K^*$ *est abélien.*

2. *Dans un corps $\mathbb{K}$, si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ (un anneau vérifiant cette propriété est dit intégre). En effet, supposons que $xy = 0$ et $x \neq 0$. De $\frac{1}{x}(xy) = (\frac{1}{x}x)y = 0$ on tire $y = 0$.*

Exemples 1.3.3 .

1. *$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps commutatifs pour les lois usuelles.*
2. *$\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \ / \ a, \ b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps commutatif.*
3. *Z/nZ est un corps si et seulement si n est premier.*
4. *tout corps fini est commutatif.*

Définition 1.3.4 . *Soit $\mathbb{K}$ un corps et F une partie de $\mathbb{K}$. On dit que F est un sous-corps de $\mathbb{K}$ si :*

1. *F est un sous-anneau de $\mathbb{K}$.*
2. *$\forall a \in F^*, \ \ a^{-1} \in F^*$.*

Exemples 1.3.5 .

1. *$\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}[i]$ qui est lui même un sous-corps de $\mathbb{R}$.*
2. *$\mathbb{Q}$ et Z/pZ n'ont pas de sous-corps propres.*

Proposition 1.3.6 . *Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ deux corps commutatifs et f un homomorphisme de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}'$. Alors f est injectif.*

Démonstration. Soit $x \in Ker f$ tel que $x \neq 0$. x étant inversible, on a $1 = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0$, ce qui est impossible ; donc $Ker f = \{0\}$ et f est injectif.

Remarques 1.3.7 .

1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Alors comme pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, on peut définir d'une manière identique : L'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'élément neutre est $0 = (0, ..., 0, ...)$ et l'élément unité est $(1, 0, ..., 0, ...)$.*
2. *L'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau non commutatif dès que $n \geq 2$.*

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre et dans les suivants, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

2.1 Généralités

Structure d'espace vectoriel

Définition 2.1.1 . *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou encore $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tout ensemble E muni de deux lois :*

1. *Une loi interne appelée addition, notée + telle que $(E, +)$ soit un groupe abélien.*
2. *Une loi externe qui à tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ fait correspondre un élément de E noté $\lambda.x$, cette loi vérifiant les quatres propriétés suivantes :*
   - *(a)* $\forall x \in E \quad 1.x = x$
   - *(b)* $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in E \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
   - *(c)* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
   - *(d)* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

Les éléments de E s'appellent vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ scalaires.

Exemples 2.1.2 .

1. *Les ensembles E_1, E_2, E_3, respectivement des vecteurs de la droite, du plan et de l'espace de la géométrie élémentaire munis des opérations classiques :* $(x, y) \to x+y$ *et* $(\lambda, x) \to \lambda.x$ *sont des espaces vectoriels réels.*

2. *Soit* $I\!K^n$ *l'ensemble des n-uplets* $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ *d'éléments de* $I\!K$*. Munissons* $I\!K^n$ *des lois suivantes :*
   - Une addition définie par $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)+(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, ..., \alpha_n+\beta_n)$
   - Une loi externe définie par : $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n)$
   Il est facile de vérifier que $(I\!K^n, +, .)$ *est un espace vectoriel sur* $I\!K$*.*

3. *L'ensemble* $\mathcal{M}_n(I\!K)$ *des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans* $I\!K$ *est un* $I\!K$*-espace vectoriel. Les lois sont définies par :*
   $$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \text{ et } \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$$

4. *Si E et F sont des espaces vectoriels sur* $I\!K$*, on peut munir* $E \times F$ *d'une structure naturelle de* $I\!K$*-espace vectoriel, en définissant ainsi les opérations :*
   $$\forall (x, y),\ (x', y') \in E \times F \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
   $$\forall (x, y) \in E \times F \ \ \forall \lambda \in I\!K \quad \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)$$
   L'ensemble $E \times F$ *muni de ces deux lois s'appelle l'espace vectoriel produit de E par F.*

5. *L'ensemble* $I\!K[X]$ *des polynômes à coefficients dans* $I\!K$ *muni des lois classiques :* $(P, Q) \to P + Q$ *et* $(\lambda, P) \to \lambda.P$ *est un espace vectoriel sur* $I\!K$*.*

6. *Soit D un ensemble quelconque, et* $\mathcal{A}(D, I\!K)$ *l'ensemble des applications de D dans* $I\!K$*. Munissons* $\mathcal{A}(D, I\!K)$ *des lois suivantes : Pour tout* $f,\ g \in \mathcal{A}(D, I\!K)$ *et* $\lambda \in I\!K$
   $$f + g : x \to f(x) + g(x),\ \ \lambda.f : x \to \lambda.f(x)$$
   Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{A}(D, I\!K)$ *muni de ces deux lois* $\mathcal{A}(D, I\!K)$ *est un espace vectoriel sur* $I\!K$ *(appelé espace des applications de D dans K).*
   On peut noter les cas particuliers suivants :
   (a) $D = I\!N$, $I\!K = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(D, I\!K)$ *est l'espace vectoriel réel des suites réelles.*

(b) *$D = \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel complexe des suites complexes.*

(c) *$D \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel réel des fonctions numériques, de variable réelle, définies sur le domaine $\mathbb{D}$.*

Calcul dans un espace vectoriel :

La proposition suivante montre qu'il n'y a absolument aucune surprise et que l'on calcule en fait comme dans toute structure algébrique classique.

Proposition 2.1.3 .

1. $\forall x, y \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda 0 = 0.$
3. $\forall y \in E,\ \ \lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda(-y) = -\lambda y.$
4. $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \ (\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x.$
5. $\forall \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \ (-\mu)x = -\mu x.$
6. $\forall x \in E,\ \ 0.x = 0.$
7. $\forall x \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0.$

Preuve. 1). On a $\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y) = \lambda x$. 2) On fait $x = y$ dans (1). 3) On fait $x = 0$ dans dans 1). 4) On a $(\lambda - \mu)x + \mu x = ((\lambda - \mu) + \mu)x = \lambda x$. 5) On fait $\lambda = 0$ dans 4). 6) On fait $\lambda = \mu$ dans 4). 7) En effet, supposons que $\lambda x = 0$. Si $\lambda = 0$, on a gagné. Sinon λ est inversible dans le corps $\mathbb{K}$ et on a par multiplication par λ^{-1} : $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0$, d'où $1.x = 0$, i.e $x = 0$.

Sous-espaces vectoriels

Définition 2.1.4 . *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie non vide de E. On dira que F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé s.e.v) si :*

1. *F est stable pour les deux lois $+$ et $.$*
2. *F muni des deux lois induites $+$ et $.$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 2.1.5 . *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $I\!K$ et F une partie non vide de E. F non vide d'un $I\!K$-espace vectoriel E est dite sous-espace de E si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :*

1. *$(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$.*
2. *$\forall \lambda \in I\!K \ \ \forall x \in F \ \lambda.x \in F$.*

Théorème 2.1.6 . *Soit F une partie non vide d'un $I\!K$-espace vectoriel E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$\forall x, y \in E, \ \ \forall \lambda, \ \mu \in I\!K, \ \ \lambda x + \mu y \in F$.*

Preuve. Il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2). Inversement, supposons qu'on ait 2). Prenons $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. alors $x \in F$ et $y \in F$ entrainent que $x - y \in F$. Donc F est un sous-groupe additif de E. Prenons ensuite $\mu = 0$. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F$ entrainent $\lambda x \in F$.

Exemples 2.1.7 .

1. *Soit E un $I\!K$-espace vectoriel. Les parties $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E appelés sous-espaces triviaux.*
2. *Soit $n \in I\!N$. L'ensemble $I\!K_n[X]$ des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v de v de $I\!K[X]$.*
3. *L'intersection quelconque d'une famille de s.e.v d'un $I\!K$-espace vectoriel E est un s.e.v de E.*
4. *L'analyse fournit de nombreux exemples de s.e.v de $\mathcal{A}(I, \boldsymbol{R})$, où I est un intervalle de $\boldsymbol{R}$. Entre autres :*
   (a) *L'ensemble $\mathcal{C}(I, \boldsymbol{R})$ des applications continues sur I.*
   (b) *L'ensemble $\mathcal{D}(I, \boldsymbol{R})$ des applications dérivables sur I.*
   (c) *Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{D}_n(I, \boldsymbol{R})$ des applications n fois dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \boldsymbol{R})$. L'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel noté $\mathcal{D}^\infty(I, \boldsymbol{R})$, espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur I.*

(d) *Pour tout* $n \geq 1$, *l'ensemble* $\mathcal{C}_n(I, \boldsymbol{R})$ *des applications* $\mathcal{C}_n$ *sur* I.

5. *Il y a évidement des parties de* $I\!K$*-espaces vectoriels qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels. Notons en particulier :*
   (a) *L'ensemble des polynômes de degré exactement* n *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $I\!K[X]$.
   (b) *L'ensemble des fonctions positives ou nulles (resp. négatives ou nulles) définies sur une partie* D *de* $\boldsymbol{R}$, *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{A}(D, \boldsymbol{R})$.

Sous-espace engendré par une partie

Définition 2.1.8 . *Soit* $(x_1, ..., x_n)$ *un système fini de vecteurs d'un* $I\!K$*-espace vectoriel* E. *Un vecteur* $x \in E$ *est dit combinaison linéaire des vecteurs* $x_1, ..., x_n$ *si l'on peut trouver un système* $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *de scalaires, tel que*

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n.$$

Les scalaires λ_i *sont nommés coefficients de la combinaison linéaire* x.

Exemples 2.1.9 .

1. *Le vecteur* 0 *est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant nuls.*
2. *Tout vecteur* x *est combinaison linéaire de tout système de vecteurs contenant* x, *le coefficient de* x *étant* 1, *tous les autres égaux à* 0.
3. *Dans l'espace vectoriel* $I\!K^3$ *sur le corps* $I\!K$, *soit le triplet* (e_1, e_2, e_3) *où* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. *Tout vecteur* (a, b, c) *de* $I\!K^3$ *est combinaison linéaire des vecteurs* e_1, e_2, e_3 *car :* $(a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3$

Théorème 2.1.10 . *Soit* $(x_1, ..., x_n)$ *un système fini de vecteurs d'un* $I\!K$*-espace vectoriel* E. *L'ensemble* F *des combinaisons linéaires des vecteurs* $x_1, ..., x_n$ *est un s.e.v de* E *; c'est le plus petit s.e.v (pour l'inclusion) de* E *contenant les vecteurs* $x_1, ..., x_n$. F *est dit sous-espace engendré par les vecteurs* $x_1, ..., x_n$ *et il est noté :*

$$F =< x_1, ..., x_n >= \{x \in E \ \ / \ \ \exists \lambda_1, ...\lambda_n \in I\!K, \ \ x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\}$$

Preuve. Partons de deux éléments de F :

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \quad , \; y = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n y_n$$

Quels que soient les scalaires α et β, on a :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)x_n$$

On obtient une combinaison linéaire du système proposé, donc un élément de F qui est, par conséquent, sous-espace vectoriel de E.
F contient évidemment chacun des x_i du système $(x_1, ..., x_n)$. D'autre part, tout sous-espace, contenant les vecteurs $x_1, ..., x_n$, doit contenir aussi la somme $\lambda_1 x_1 + ... \lambda_n x_n$ pour tout scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Un tel sous-espace contient donc F qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant les vecteurs $x_1, ..., x_n$.

Définition 2.1.11 . *un système fini $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs d'un $I\!K$-espace vectoriel E est dit générateur de E (ou aussi engendre E) si $E =< x_1, ..., x_n >$. En d'autres termes :*

$$\forall x \in E, \; \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in I\!K, \; / \; x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n.$$

Exemples 2.1.12 .

1. *$I\!K^n$ est engendré par les n-uplets $(1, 0, 0, ..., 0), \; (0, 1, 0, ..., 0), ..., \; (0, 0, 0, ..., 1)$.*
2. *Soit n un entier. Dans $\mathcal{A}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ les fonctions 1, x, x^2,...,x^n engendrent le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.*

Théorème 2.1.13 . *Soit A une partie d'un $I\!K$-espace vectoriel E. L'ensemble H des combinaisons linéaires finies d'éléments de A est un s.e.v de E ; c'est le plus petit s.e.v (pour l'inclusion) de E contenant A. H est dit sous-espace engendré par la partie A, il est noté :*

$$< A >= \{x \in E \;\; / \;\; \exists n \geq 1, \;\; \lambda_1, ...\lambda_n \in I\!K, x_1, ...x_n \in E \;\;\; x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\}$$

Exemples 2.1.14 .

1. *$I\!K[X]$ est engendré par la partie $\{1, X, ..., X^n, ...\}$.*

2. *Soient* (E_n) *une suite croissante de s.e.v d'un* $\mathbb{K}$*-espace vecrtoriel* E*. Si* G_n *est un système générateur de* E_n*, alors* $E = \cup_n E_n$ *est un s.e.v de* E *admettant* $\cup_n G_n$ *comme partie génératrice.*

Partie libre - Partie liée

Définition 2.1.15 .

1. *On dit qu'un système fini* $(x_1, ..., x_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est libre si toute combinaison linéaire de* $x_1, ..., x_n$ *est triviale càd :*

$$\text{Si } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0 \text{ , alors } \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

2. *On dit qu'un système fini* $(x_1, ..., x_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est lié s'il n'est pas libre. Ce qui revient à dire qu'il existe des scalaires* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *non tous nuls tels que :*

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0.$$

Propriétés 2.1.16 .

1. *Tout vecteur non nul est libre.*
2. *Tout système contenu dans un système fini libre est libre.*
3. *Tout système contenant le vecteur nul est lié.*
4. *Tout système fini contenant un système lié est lié.*

Proposition 2.1.17 . *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Le système* $(x_1, ..., x_n)$ *est lié, si et seulement si, l'un au moins des vecteurs* x_i *s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.*

Preuve. Supposons que le système $(x_1, ..., x_n)$ est lié, il existe donc un système $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de scalaires non tous nuls tel que $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0$. Soit alors $\lambda_i \neq 0$, il est inversible dans $\mathbb{K}$ et on peut écrire :

$$x_i = {\lambda_i}^{-1} \lambda_1 x_1 + ... + {\lambda_i}^{-1} \lambda_{i-1} x_{i-1} + {\lambda_i}^{-1} \lambda_{i+1} x_{i+1} + ... + {\lambda_i}^{-1} \lambda_n x_n.$$

Inversement l'autre implication est évidente.

Définition 2.1.18 .

1. *On dit qu'une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est libre si tout système fini d'éléments distincts de A est libre, càd :*
   $\forall n \geq 1,\ \forall x_1, ..., x_n \in A, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0$ *, on a :*
   $$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$
2. *On dit qu'une partie A de E est liée si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe un système fini de vecteurs de A qui soit lié.*

Exemples 2.1.19 .

1. *La partie $\{1, X, ..., X^n, ...\}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$*
2. *La partie formée des applications f_n définies par $f_n(x) = e^{nx}$ est libre dans $\mathcal{A}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$*

2.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 2.2.1 .

1. *On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel engendré par un système fini de vecteurs. Dans le cas contraire on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie.*
2. *Un système $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit base de E si $(x_1, ..., x_n)$ est libre et générateur E.*

Exemples 2.2.2 .

1. *Une base de $\mathbb{K}^n$ est $(1, 0, 0, ..., 0),\ (0, 1, 0, ..., 0), ...,\ (0, 0, 0, ..., 1)$; elle est dite base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

2. *Les polynômes* 1, X, X^2,...,X^n *forment une base de l'espace vectoriel* $I\!K_n[X]$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à* n.

3. *Si* E *et* F *sont deux espaces vectoriels de bases respectives* $(e_1, ..., e_n)$ *et* $(f_1, ..., f_m)$, *alors* $E \times F$ *admet pour base* $(e_1, 0_F), ..., (e_n, 0_F), (0_E, f_1), ...(0_E, f_m)$.

,

Remarques 2.2.3 . *Il ne faudrait pas croire que tous les espaces vectoriels sur un corps* $I\!K$ *soient de dimension finie. L'exemple le plus simple est* $I\!K[X]$, *en effet supposons que* $I\!K[X]$ *est engendré par* P_1,...P_r. *Si* n *est le plus haut degré des polynômes* P_1,...P_r, *le polynôme* X^{n+1} *ne peut s'écrire comme combibaison linéaire des vecteurs* P_1,...,P_r. *Il s'en suit que* $I\!K[X]$ *ne peut pas être engendré par un nombre fini de polynômes.*

Le lemme suivant est fondamental. Il nous permettera de montrer que toutes les bases d'un $I\!K$-espace vectoriel sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera dimension de l'espace.

Lemme 2.2.4 . *Soit* E *un* $I\!K$*-espace vectoriel engendré par le système* $(e_1, ..., e_n)$ *et soit* $(f_1, ..., f_m)$ *un système de vecteurs de* E. *Si* $m > n$, *alors* $(f_1, ..., f_m)$ *est lié.*

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur n. Soit $m > n$.
Cette propriété est vraie pour $n = 1$, car si (f_1, f_2) sont deux vecteurs d'un espace vectoriel engendré par e_1, il existe λ_1 et λ_2 tels que :

$$f_1 = \lambda_1 e_1 \text{ et } f_2 = \lambda_2 e_1.$$

Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. Sinon, on a $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$ et le système est lié.
On suppose la propriété vraie pour $n - 1$ et on la montre pour n. Soit $(f_1, ..., f_m)$ un système de vecteurs d'un espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_n)$, avec $m > n$. On peut écrire

$$\forall i = 1, ..., m \quad f_i = a_i e_1 + g_i, \text{ avec } a_i \in I\!K \text{ et } g_i \in < e_2, ...e_n > .$$

Si tous les a_i sont nuls, alors les vecteurs $f_i \in < e_2, ..., e_n >$ pour tout $i = 1, ..., m$. D'après l'hypothèse de récurrence, le système $(f_1, ..., f_m)$ est lié.
Sinon, l'un des a_i est non nul, par exemple a_1. Dans ce cas on a :

$$a_1 f_2 - a_2 f_1 \in < e_2, ..., e_n >, ..., a_1 f_m - a_m f_1 \in < e_2, ..., e_n > .$$

Or $m - 1 > n - 1$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Par suite il existe des coefficients λ_i non tous nuls tels que :

$$\lambda_2 (a_1 f_2 - a_2 f_1) + ... + \lambda_m (a_1 f_m - a_m f_1) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$-(\lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m) f_1 + \lambda_2 a_1 f_2 + ... + \lambda_m a_1 f_m = 0.$$

Comme l'un des coefficients $\lambda_i a_1 \neq 0$, le système $(f_1, ..., f_m)$ est lié, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2.2.5 .

1. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base. Plus précisément, tout système générateur fini contient au moins une base.*
2. *Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de E et se note $dimE$.*

Preuve. 1) Existence d'une base. Si $(e_1, ...e_n)$ engendre E et si ce système est libre, il forme une base. S'il est lié, l'un des vecteurs, par exemple e_n est combinaison linéaire des autres vecteurs. Il n'est pas difficile de voir que, dans ce cas, le système $(e_1, ...e_{n-1})$ engendre E. On itére le procédé jusqu'à obtenir un système générateur libre. Cette méthode est constructive.
2) Soient $(e_1, ...e_n)$ et $(f_1, ..., f_m)$ deux bases de E. Alors on a d'après le lemme 1.5.4 :
$(e_1, ...e_n)$ est générateur de E et $(f_1, ..., f_m)$ est libre dans E, donc $m \leq n$,
$(e_1, ...e_n)$ est libre et $(f_1, ..., f_m)$ est générateur, donc $n \leq m$.

Théorème 2.2.6 . *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.*

1. *Tout système libre de E ayant n vecteurs est une base.*
2. *Tout système générateur de E ayant n vecteurs est une base de E.*
3. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, $dimF \leq dimE$ et il y a égalité si et seulement si $F = E$*

Preuve. 1) Soit $(e_1, ..., e_n)$ un système libre de E, montrons qu'il est générateur de E. Soit $x \in E$, le système $(x, e_1, ..., e_n)$ est lié d'après le lemme 1.5.4. Il existe donc un système de scalaires non tous nuls $(\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que :

$$\lambda x + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0.$$

Le scalaire λ est forcément non nul, car sinon $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ compte tenu de la liberté du système $(e_1, ..., e_n)$. Par suite on peut écrire :

$$x = -(\lambda^{-1}\lambda_1 e_1 + ... + \lambda^{-1}\lambda_n e_n).$$

Donc $(e_1, ...e_n)$ engendre E.
2) Soit $(e_1, ..., e_n)$ un système générateur de E, montrons qu'il est libre dans E. Si le système $(e_1, ..., e_n)$ est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs ; soit par exemple e_1. Dans ce cas le système $(e_2, ...e_n)$ est générateur de E, ce qui est contradictoire en tenant compte du lemme 1.5.4, car une base de E qui contient forcément n éléments serait liée.
3) Parmi tous les systèmes libres de F, on en choisit un maximal et on le note $(f_1, ...f_m)$. Le nombre des vecteurs de ce système est nécessairement inférieur à dim E, d'après le lemme 1.5.4. Ce système est forcément générateur, car si $x \in F$, le système $(x, f_1, ...f_m)$ est lié puisque $(f_1, ...f_m)$ est libre maximal, et donc x peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs du système $(f_1, ..., f_m)$ comme dans 1).
Si F est un sous-espace vérifiant $dimE = dimF$, alors $F = E$, puisqu'une base de F étant un système libre de E, possédant n vecteurs est aussi une base de E en vertu de 1).

Un autre moyen de former une base dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est le suivant ; c'est le théorème de la base incomplète.

Théorème 2.2.7 . *Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, ..., e_n)$ et soit $(f_1, ..., f_m)$ un systè me libre. Alors il existe $n - m$ vecteurs parmi les vecteurs $e_1, ..., e_n$ tels que le système constitué de ces $n - m$ vecteurs et des vecteurs $f_1, ..., f_m$ forme une base de E.*

Preuve. On voit que si $m < n$, alors il existe un des vecteurs e_i tel que $(f_1, ...f_m, e_i)$ soit libre. Sinon, pour tout $i = 1, ..., n$, tous les systèmes $(f_1, ...f_m, e_i)$ seront liés et les vecteurs $e_1, ..., e_n$ seront combinaisons linéaires des vecteurs $f_1, ...f_m$ et donc le système $(f_1, ..., f_m)$ sera générateur de E, ce qui est impossible. En posant $f_{m+1} = e_i$, on itère le procédé jusqu'à obtenir n vecteurs libres f_j. Ils forment alors une base. Cette méthode est constructive.

Exemples 2.2.8 . *Dans $\boldsymbol{R}^4$, on prend la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et le système libre suivant : $f_1 = e_1 + 2e_2$ et $f_2 = -e_1 + e_2$. Le compléter en une base de de $\boldsymbol{R}^4$. On a :*
(f_1, f_2, e_1) est lié
(f_1, f_2, e_2) est lié
(f_1, f_2, e_3) est libre
(f_1, f_2, e_3, e_4) est libre. Ces quatres vecteurs forment une base de $\boldsymbol{R}^4$.

Rang d'un système fini de vecteurs

Définition 2.2.9 . *On appelle rang du système de vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système.*

Exemples 2.2.10 . *Dans $\mathbb{K}^4$, considérons le système des trois vecteurs :*

$$x_1 = (1, 0, 0, 0),\ x_2 = (0, 1, 0, 0),\ x_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Il est clair que le système (x_1, x_2) est libre dans $\mathbb{K}^4$ et que $x_3 = x_1 + x_2$. Par conséquent, le sous-espace F engendré par (x_1, x_2, x_3) est aussi engendré par le système libre (x_1, x_2) et par suite le rang de F est 2.

Proposition 2.2.11 . *Le rang d'un système de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs libres que l'on peut extraire de ce système.*

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces

Il est à noter que la réunion de deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel n'est pas en général un s.e.v. Pour remédier à cet inconvénient nous allons remplacer l'union des s.e.v par une opération plus convenable qui est la somme des s.e.v.

Définition 2.3.1 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimemsion finie ou non, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G l'ensemble, noté $F+G$, défini par :*

$$F + G = \{z \in E \ \ /\exists\ x \in F,\ y \in G\ ,\ z = x + y\}.$$

Proposition 2.3.2 . *La somme $F + G$ de deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un s.e.v de E. De plus c'est le plus petit s.e.v de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$.*

Preuve. Soient deux éléments $x + y$ et $x' + y' \in F + G$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ et soit α et β deux scalaires, on a $\alpha(x+y)+\beta(x'+y') = (\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y') \in F+G$. Donc $F + G$ est un s.e.v de E. Il est clair que $F + G$ contient F et G, donc $F \cup G$. D'autre part, tout sous-espace, contenant $F \cup G$, doit contenir aussi la somme $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Un tel sous-espace contient donc $F + G$ qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$.

Définition 2.3.3 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux s.e.v de E. On dit que la somme $F + G$ est directe et on note $F \oplus G$, si tout élément de $F + G$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.*

Proposition 2.3.4 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux s.e.v de E. Il y a équivalence entre :*

1. *$F + G$ est directe.*
2. *$F \cap G = \{0\}$.*
3. *$x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G \Longrightarrow x = y = 0$.*

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) Si $z \in F \cap G$, z peut s'écrire $z = z + 0 = 0 + z$. La décomposition étant unique, $z = 0$. 2)$\Longrightarrow$ 3) Si $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G$, alors $x = -y \in F \cap G = \{0\}$. 3)$\Longrightarrow$ 1) Si $x+y = x'+y'$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$, alors on a $(x-x')+(y-y') = 0$ avec $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$; donc $x = x'$ et $y = y'$.

Définition 2.3.5 *. Soit E un $I\!K$-espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E. On dit F et G sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, si tout élément de E s'écrit d'une manière unique sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.*

En d'autre termes, $E = F \oplus G$ si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $E = F + G$.
2. La somme $F + G$ est directe (i.e $F \cap G = \{0\}$).

Définition 2.3.6 *. Soit E un $I\!K$-espace vectoriel et soit F un s.e.v de E. On appelle supplémentaire de F (sous-entendu dans E) tout s.e.v G de E vérifiant $E = F \oplus G$.*

Proposition 2.3.7 *. Soit E est un $I\!K$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire G ; de plus tous les supplémentaires ont pour dimension $dimE - dimF$.*

Preuve. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $(f_1, ...f_m)$ une base de F, le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la base de F par $n - m$ vecteurs pour former une base de E. Ces $n - m$ vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel G qui sera supplémentaire de F.

Proposition 2.3.8 *. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ est de dimension finie et on a :*

$$dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G).$$

Preuve. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de $F \cap G$, que l'on complète en une base $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ de F et $(e_1, ..., e_p, g_1, ..., g_r)$ de G. On vérifiera alors que $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q, g_1, ..., g_r)$ est une base de $F + G$.

Somme de plusieurs sous-espaces

Définition 2.3.9 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimemsion finie ou non, $E_1, ..., E_n$ n s.e.v de E. On appelle somme des s.e.v $E_1, E_2, ..., E_n$ l'ensemble, noté $E_1 + ... + E_n$, défini par :*

$$E_1 + E_3 + ... + E_n = \{z \in E \ \ /\exists \ x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n \ , \ z = x_1 + ... + x_n\}.$$

Théorème 2.3.10 . *La somme $E_1 + E_2 + ... + E_n$ de n s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un s.e.v de E. De plus c'est le plus petit s.e.v de E (au sens de l'inclusion) contenant les s.e.v $E_1, E_2, ..., E_n$.*

Définition 2.3.11 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2, ..., E_n$, n s.e.v de E. On dit que la somme $E_1 + E_2 + ... + E_n$ est directe et on note $E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$, si tout $x \in E_1 + ... + E_n$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_n$ avec $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$.*

Proposition 2.3.12 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2, ..., E_n$, n s.e.v de E. Il y a équivalence entre :*

1. *$E_1 + ... + E_n$ est directe.*
2. *$\forall i \in [1, n], \quad E_i \bigcap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$.*
3. *$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n, \quad \sum_{i=1}^{i=n} x_i = 0 \Longrightarrow x_1 = ... = x_n = 0$.*

Définition 2.3.13 . *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, ...E_n$ n s.e.v de E. On dit que E est somme directe des s.e.v $E_1, ...E_n$ et on note $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$, si tout élément de E s'écrit d'une manière unique sous la forme $x_1 + ... + x_n$ avec $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$.*

En d'autres termes, $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$ si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $E = E_1 + ... + E_n$.
2. $\forall i \in [1, n], \quad E_i \bigcap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$.

Remarques 2.3.14 .

1. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $(e_1, ...e_n)$, alors on a :*

$$E =< e_1 > \oplus ... \oplus < e_n > .$$

2. *Si F et G sont deux s.e.v en somme directe, alors $dim(F \oplus G) = dimF + dimG$.*
3. *Si F et G sont deux s.e.v en somme directe, alors une base de $F \oplus G$ s'obtient en réunissant une base de F et une base de G.*
4. *Inversement, si on scinde une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E en deux systèmes disjoints, ces deux systèmes engendrent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.*

Chapitre 3

Les applications linéaires

Dans ce chapitre et dans les suivants, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

3.1 Généralités

Applications linéaires

Définition 3.1.1 . *Soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application de E dans E'. On dit que f est linéaire, si :*

1. $f(v+w) = f(v) + f(w), \ \forall v, w \in E.$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \ \forall v \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

L'ensemble des applications linéaires e E dans E' est noté $\mathcal{L}(E, E')$. Une application linéaire de E dans E est appelé endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$

Remarques 3.1.2 . *Pour toute application linéaire f, on a $f(0) = 0$ puisque f est un homomorphisme de groupes.*

Exemples 3.1.3 .

1. *L'application* $f : E \to E'$ *qui associe à un élément* $v \in E$, *le vecteur nul est linéaire ; elle est dite application nulle.*
2. *L'application* $f : E \to E$ *qui associe à un élément* $v \in E$, *le vecteur* v *est linéaire ; elle est dite application identique de* E.
3. *L'application* $f : E \to E$ *qui associe à un élément* $v \in E$, *le vecteur* αv $(\alpha \in \mathbb{K})$ *est linéaire ; elle est appelé homothétie de rapport* α.
4. *L'application* $f : \boldsymbol{R}[X] \to \boldsymbol{R}[X]$ *qui associe à un polynôme* P, *sa dérivée* P' *est linéaire ; elle est dite dérivation.*
5. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$. *L'application* $P_{r_1} : E \to E_1$ *qui associe à vecteur* $x = x_1 + x_2$, *le vecteur* x_1 $(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2)$, *est linéaire ; elle est appelé projection sur* E_1 *parallèlement à* E_2.
6. *Soit* $v_0 \neq 0$ *un vecteur de* E. *L'application* $\tau : E \to E$ *qui associe à u vecteur* v, *le vecteur* $v + v_0$ *est non linéaire ; car* $\tau(0) = v_0 \neq 0$ *; elle appelée translation.*

Images et noyau

Proposition 3.1.4 . *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E')$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* $f(F)$ *est un sous-espace vectoriel de* E'. *En particulier* $f(E)$ *est un sous espace vectoriel de* E' *appelé image de* f *et noté* Imf. *Sa dimension est appelé rang de* f.

Preuve. On sait que $f(F)$ est un sous groupe de E', il suffit donc de vérifier la stabilité pour l'opération externe. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f(v) \in f(F)$, on a $\lambda f(V) = f(\lambda v) \in f(F)$.

Proposition 3.1.5 . *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E')$, $Kerf = \{x \in E : \ f(x) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E, *appelé noyau de* f.

Preuve. Il suffit de vérifier la stabilité pour l'opération externe. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0$ et par suite $\lambda x \in kerf$.

Proposition 3.1.6 . f *est injective si et seulement si* $Kerf = \{0\}$

Exemples 3.1.7 .

1. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$. *On a* $ImP_{r_1} = E_1$ *et* $KerP_{r_1} = E_2$.
2. *Soit* $D : \boldsymbol{R}[X] \to \boldsymbol{R}[X]4$ *l'application dérivation. On a* $KerD = \boldsymbol{R}$ *et* $ImD = \boldsymbol{R}[X]$
3. *Soit* $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}2$ *l'application définie par* $f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$. *On a :* $Kerf = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : \ y = -2x \text{ et } z = y\} = \{(x, -2x, -2x) : \ x \in \boldsymbol{R}\}$. *Kerf est la droite vectorielle engendré par* $(1, -2, -2)$.
   $Imf = \{(x', y') \in \boldsymbol{R}^2 : \ \exists (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : \ x' = 2x + y, \ ety' = y - z\}$. *Soit* $(x', y') \in \boldsymbol{R}^2$. *En posant* $x = \frac{x'-y'}{2}, y = y', z = 0$, *on vérifie que* $f(x, y, z) = (x', y')$, *donc* f *esr surjective, d'où* $Imf = \boldsymbol{R}^2$.

Proposition 3.1.8 . *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E')$ *et* $(v_1, ..., v_n)$ *un système de vecteurs de* E.

1. *Si* f *est injective et le système* $(v_1, ..., v_n)$ *est libre dans* E, *alors le système* $(f(v_1), ..., f(v_n))$ *est libre dans* E'.
2. *Si* f *esr surjective et le système* $(v_1, ..., v_n)$ *est générateur de* E, *alors le système* $(f(v_1), ..., f(v_n)$ *est générateur de* E'.

En particulier si f *est bijective, l'image d'une base de* E *est une base de* E'.

Preuve. 1) Supposons que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i) = 0$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Comme f est linéaire, $f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f v_i) = 0$; et donc $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0$ compte tenu de l'injection de f. L'indépendence du sysème $(v_1, ..., v_n)$ entraine $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. 2) Soit $y \in E'$, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Il s'en suit que $y = f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i)$.

Théorème 3.1.9 . *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si, ils ont la même dimension.*

Preuve. $\Longrightarrow$ Si $f : E \to E'$ est un isomorphisme, alors d'après la proposition précédente l'image d'une base de E est une base de E', donc E et E' ont la même

dimension.
$\Longleftarrow$ Supposons que $dimE = dimE'$ et soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(e'_1, ...e'_n)$ une base de E'. Soit $f : E \to E'$ définie par $f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e'_i$. Il est facile de voir que f est linéaire bijective.

Corollaire 3.1.10 . *Soit E u espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $dimE = n$.*

Théorème de la dimension

Théorème 3.1.11 . *Théorème de la dimension. Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, E')$, alors $dimE = dim(Kerf) + dim(Imf)$.*

Preuve. Supposons que $dimE = n$, $dim(Kerf) = r$ et montrons que $dim(Imf) = n - r$. Soit $(w_1, ..., w_r)$ une base de $Kerf$ et complétons la pour obtenir une base de E, en l'occurence $(w_1, ...w_r, v_1, ...v_{n-r})$. montrons que $\mathcal{B} = (f(v_1), ...f(v_{n-r}))$ est une base de Imf. $\mathcal{B}$ engendre Imf en effet $f(x) = f(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_r w_r + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{n-r} v_{n-r}) = \sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i f(v_i)$. $\mathcal{B}$ est libre puisque si $\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i f(v_i) = 0$, alors $f(\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i v_i) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i v_i \in Kerf$. Il s'en suit que $\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i f(v_i)$

Corollaire 3.1.12 . *$f \in \mathcal{L}(E, E')$, E et E' étant de méme dimension, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Preuve. Il suffit de montrer que 1) $\Longleftrightarrow$ 2). De l'égalité $dimE = dim(Kerf) + dim(Imf)$, résulte f injective $\Longleftrightarrow Kerf = \{0\} \Longleftrightarrow dimE = dim(Imf) \Longleftrightarrow dimE' = dim(Imf) \Longleftrightarrow E' = Imf \Longleftrightarrow f$ surjective

Remarques 3.1.13 .

1. *Ce résultat est faux en dimension infinie. L'application dérivation* $D : \boldsymbol{R}[X] \to \boldsymbol{R}[X]$ *qui à un polynôme* P *fait correspondre* P' *est surjective mais non injective.*
2. *Une application linéaire* f *est parfaitement définie si on connait l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de* f *on a :*
   $f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i f(e_i)$*, donc si on connait* $f(e_1), ..., f(e_n)$ f *est connue en tout* x*.*

Algèbre $\mathcal{L}(E)$ et projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On munit $\mathcal{L}(E)$ des lois suivantes :
- $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $(f, g) \to f + g$
- $\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $(\lambda, f) \to \lambda.f$
-$\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $(f, g) \to f \circ g$.
La proposition suivante est facile à établir :

Proposition 3.1.14 1. $(\mathcal{L}(E), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau. De plus* $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$*.*
   Les propriétés 1 et 2 expriment que $\mathcal{L}(E)$ *est une algèbre sur* $\mathbb{K}$*.*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$. On définit $Pr_1 : E \to E$ avec $Pr_1(x_1 + x_2) = x_1,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$. Pr_1 est appelée projection sur E_1 parallélement à E_2. On définit aussi $Pr_2 : E \to E$ avec $P_2(x_1 + x_2) = x_2$.

Proposition 3.1.15 1. Pr_1 *est application linéaire,* $KerPr_1 = E_2$ *et* $ImPr_1 = E_1$

2. $Pr_1 \circ Pr_1 = Pr_1$*,* $Pr_1 + Pr_2 = id_E$ *et* $P_r1 \circ Pr_2 = P_r2 \circ Pr_1 = 0$
3. $E = KerPr_1 \oplus ImPr_1 = KerPr_2 \oplus ImPr_2$*.*

Preuve. 1) Si $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, alors on $Pr_1(x+y) = Pr_1((x_1+y_1)+(x_2+y_2)) = x_1 + y_1 = Pr_1(x) + Pr_1(y)$ et $Pr_1\lambda(x) = Pr_1(\lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda x_1 = \lambda Pr_1(x)$. Il est

facile de voir que $KerPr_1 = \{x = x_1 + x_2 \ /Pr_1(x) = 0\} = \{x = x_1 + x_2 \ /x_1 = 0\} = E_2$ et $ImPr_1 = \{Pr_(x) \ /x = x_1 + x_2 \in E\} = \{x_1 \ /x_1 \in E_1\} = E_1$. 2) Si $x = x_1 + x_2$, on a $Pr_1 \circ Pr_1(x) = Pr_1(x_1) = x_1 = Pr_1(x)$ et $(Pr_1 + Pr_2)(x) = Pr_1(x) + Pr_2(x) = x_1 + x_2 = x$. Il est clair que $Pr_1 \circ Pr_2(x) = Pr_1(x_2) = 0$ et de même ona $Pr_2 \circ Pr_1 = 0$. 3) Finalement on a $E = E_1 \oplus E_2 = KerPr_2 \oplus ImPr_2 = KerPr_1 \oplus ImPr_1$.

Définition 3.1.16 . *Un endomorphisme* $p \in \mathcal{L}(E)$ *est dit projecteur si* $p \circ p = p$.

Chapitre 4

Applications linéaires et Matrices

Matrices Associées aux Applications linéaires

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimension n et p respectivement, et $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. Choisissons $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(e'_1, ..., e'_p)$ une base de E', les images par f des vecteurs $e_1, ...e_n$ se décomposent sur la base $(e'_1, ..., e'_p)$:
$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p$
$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p$
.
.
.
$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p$

Définition 4.0.17 . *On appelle matrice de f dans les bases $(e_1, ..., e_n)$, $(e'_1, ..., e'_p)$ la matrice notée $M(f)_{e_i,e'_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes*

des vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ *dans la base* $(e'_1, ..., e'_p)$ *:*

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la matrice associée à f *dépend du choix des bases de* E *et* E'*.*

Exemples 4.0.18 .

1. *Soit* E *de dimension nfinie et* $id_E : E \to E$ *l'application qui à* x *associe* x*. On considère une base* $(e_i,\ i = 1, ..., n)$ *de* E*. On a*

$$M(id_E)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & 0 \\ . & . & . & ... & 0 \\ 0 & 0 & . & ... & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

matrice unité de $\mathcal{M}_n(I\!K)$*.*

2. *Soit* $E = \boldsymbol{R}^2$ *et* $P_1 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ *l'application linéaire qui à* (x, y) *associe* $(x, 0)$*. Considérons la base canonique* (e_1, e_2) *de* $\boldsymbol{R}^2$*. On a* $P_1(e_1) = e_1$ *,* $P_1(e_2) = 0$ *et* $M(P_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. *Soit* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\boldsymbol{R}^3$ *et* (e'_1, e'_2) *la base canonique de* $\boldsymbol{R}^2$*. Considérons l'application linéaire* $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ *qui à* (x, y, z) *associe* $(x - y, z - y)$*. On a* $M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. *Soit* $D : \boldsymbol{R}_4[t] \to \boldsymbol{R}_3[t]$ *l'application linéaire qui à* $p(t)$ *associe* $p'(t)$*. On a* $M(D)_{e_i,e'_j} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *$(e_1, ..., e_5)$ et $(e'_1, ..., e'_4)$ étant les bases canoniques respectivement de $\boldsymbol{R}_4[t]$ et $\boldsymbol{R}_3[t]$.*

Proposition 4.0.19 . *Soient E et E' deux $I\!K$-espaces vectoriels de dimension n et p respectivement, $(e_i, \imath = 1, ...n)$ et $(e'_j,\ j = 1, ..., p)$ des bases de E et E'. Alors l'aplication $M : \mathcal{L}(E, E') \to \mathcal{M}_{p,n}(I\!K)$ qui à f associe $M(f)_{e_i,e'_j}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier $dim\mathcal{L}(E, E') = np$*

Preuve. IL est facile de vérifier la linéarité de M. Soit $f \in KerM$, donc $M(f)_{e_i,e'_j} = 0$ et par suite $f(e_1) = f(e_2) = ...f(e_n) = 0$ d'où $f = 0$ et M est injective. Elle est aussi surjective, car si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix}$., on construit f en posant :

$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p$
$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p$
.
.
.
$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p$.
Pour $x \in E$, $x = x_1e_1 + ...x_ne_n$ avec $x_i \in I\!K$. On pose $f(x) = x_1f(e_1) + ... = x_nf(e_n)$. On vérifie que f est linéaire et $M(f)_{e_i,e'_j} = A$.

Soient E, F, G trois $I\!K$-espaces vectoreils, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathcal{C} = (e'_1, ..., e'_n)$ et $\mathcal{D} = (e"_1, ..., e"_n)$ des bases respectives de E, F, G. Posons :
$M_{\mathcal{BC}}(f) = (a_{kj})$ matrice de type (p, n)
$M_{\mathcal{CD}}(g) = (b_{ik})$ matrice de type (m, p)
$M_{\mathcal{BC}}(g \circ f) = (c_{ij})$ matrice de type (m, n)

On a alors $\forall j = 1, ...n$:
$g \circ f(e_j) = g(f(e_j)) = g(\sum_{k=1}^{k=p} a_{kj} e'_k) = \sum_{k=1}^{k=p} a_{kjg()e'_k} \sum_{k=1}^{k=p} a_{kj} (\sum_{i=1}^{i=m} b_{ike"_i}) =$
$\sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=m} a_{kj} b_{ik} e"_i \sum_{i=1}^{i=m} (\sum_{k=1}^{k=p} b_{ik} a_{kj}) e"_i$

Proposition 4.0.20 . *Avec les notations précédentes on a :* $M_{\mathcal{BD}}(g \circ f) = M_{\mathcal{CD}}(g) M_{\mathcal{BC}}(f)$.

Matrice de l'inverse d'une application linéaire

Proposition 4.0.21 . *Soient E et E' deux espaces vecroriels de même dimension et de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est bijective si et seulement si $M(f)_{\mathcal{BB}'}$ est inversible. De plus $M(f^{-1})_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M(f)_{\mathcal{BB}'}{}^{-1}$.*

Preuve. Comme $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_E$, $M(f^{-1} \circ f)_{\mathcal{B}} = M(f \circ f_{\mathcal{B}'}^{-1} = M(id_E) = M(id'_E)$ et par suite $M(f^{-1})M(f) = M(f)M(f^{-1}) = I$, càd $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$.

Matrice colonne

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, ...e_n)$ une base de E. Chaque vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. On peut ainsi associer à chaque vecteur $x \in E$ une matrice du type $(n, 1)$ suivante $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

Une matrice de ce type s'appelle une matrice colonne. Une matrice colonne peut être interprétée comme matrice de l'application linéaire $\overline{X} : \mathbb{K} \to E$ qui à chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ associe λx. On a $X = M_{1,\mathcal{B}}(\overline{X})$ où (1) est la base canonique $\mathbb{K}$.

Proposition 4.0.22 . *Soient E, F deux espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathcal{C} = (e'_1, ..., e'_p)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient Y la matrice colonne associé à $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ et X la matrice colonne de x dans la base $\mathcal{B}$. On a $Y = M_{\mathcal{BC}}.X$*

Preuve. Nous pouvons utiliser la proposition précédente. On a :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$. $f \circ \overline{x}(\lambda) = f(\overline{X}(\lambda)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \overline{f(x)}(\lambda)$ càd $f \circ \overline{X} = \overline{f(X)}$ et par passage aux matrices on a $Y = M_{\mathcal{BC}}.X$

Changement de bases. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases d'un espace vectoreil E.

Définition 4.0.23 . *On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice P, carée d'ordre n, dont la jème colonne est formée des coordonnées du vecteur $e'j$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit si $e'_j = \sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} e_i \quad (j = 1, ..., n)$, alors $P = (p_{ij}) =$*
$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemples 4.0.24 . *Si E est un espace vectoriel de base (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) avec $e'_1 = 3e_1 + e_2$ et $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$, alors la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (e'_1, e'_2) est $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$*

Interprétation. Pour tout indice j, la jème colonne de P est l'expression du vecteur $e')j$ dans la base $\mathcal{B}$. P est donc la matrice de l'application identitée de E dans E quand on munit au départ E de la base $\mathcal{B}'$ et à l'arrivée de la base $\mathcal{B}$. Autrement dit $P = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E)$.

Théorème 4.0.25 . *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et P' la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Alors $PP' = P'P = I$ et aindi $P' = P^{-1}$.*

Preuve. Considérons le diagramme : $(E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B}) \to (E, \mathcal{B}')$. Comme $id \circ id = id$, en passant aux matrices on obtient $M_{\mathcal{B}'}(id) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ càd $I = PP' = P'P$.

Action sur les coordonnées.

Proposition 4.0.26 . *Soient $x \in E$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage DE $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soient X la matrice colonne de x dans $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne de x dans la base $\mathcal{B}'$. On a $X = PX'$ et aisi $X' = P^{-1}X$.*

Preuve. Découle immédiatement de l'égalité $id(x) = x$ où $id : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B}')$ et de la proposition.

Exemples 4.0.27 . *Soit $\mathbb{R}^2$ muni de deux bases, la base canonique (e_1, e_2) et la base (e'_1, e'_2) définie par $e'_1 = 2e_1 + e_2$ et $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$. Soit $x = 2e_1 + 3e_2$, calculons les composantes de x dans la base (e'_1, e'_2). On a $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ v et ainsi $x' = -5e'_1 + 4e'_2$*

Proposition 4.0.28 . *Soient E et E' deux espaces cectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathcal{C} = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ deux bases de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$, $\mathcal{C}' = (\epsilon'_1, ..., \epsilon'_p)$ deux bases de E'. Notons $A = M(f)_{e_i, e'_j}$, $A' = M(f)_{\epsilon_i, \epsilon_j}$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$. On a alors $A' = Q^{-1}AP$.*

Preuve. Considérons le diagramme :
$(E, \mathcal{B}) \to (E', \mathcal{B}')$

$(E, \mathcal{C} \to (E', \mathcal{C}')$
On a $f \circ id_E = id'_E \circ f$, et donc $M(f)_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} M(id_E)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = M(id'_E)_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} M(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ càd $A'P^{-1} = Q^{-1}A$ ou encore $A' = Q^{-1}AP$.

Corollaire 4.0.29 . *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E. Notons $A = M(f)_{e_i}$, $A' = M(f)_{e'_i}$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors $A' = P^{-1}AP$.*

Définition 4.0.30 . *Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP = A'$.*

Exemples 4.0.31 . *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui dans la base canonique (e_1, e_2) est représnté par la matrice $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice A' qui représente f dans la base (e'_1, e'_2) avec $e'_1 = (0, -1)$ et $e'_2 = (1, 1)$. On a*

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang d'une Matrice.

Définition 4.0.32 . *Soit* $(v_1, ..., v_n)$ *un système de vecteurs de* $\mathbb{K}^p$, *on appelle rang du système la dimension de l'espace engendré par les vecteurs* v_i. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, $A = (c_1, ..., c_n)$ *où l'on a noté* c_i *les vecteurs colonnes de* A ($c_i \in \mathbb{K}^p$). *On appelle rang de* A *le rang du système des vecteurs colonnes de* A.

Lemme 4.0.33 . *Soient* E, F, G *des espaces vectoriels de dimension finies,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(G, E)$. *On a*

1. *Si* g *est surjective, alors* $rang(f) = rang(f \circ g)$,
2. *Si* f *est injective. alors* $rang(g) = rang(f \circ g)$.

Preuve.1) $rang(f) = dim(f(E)) = dim(f(g(G)) = dim(f \circ g)(E) = rang(f \circ g)$.
2) Soit $\{g(v_1), ..., g(v_r)\}$ une base de Img. Le système $\{f(g(v_1)), ..., f(g(v_r))\}$ est libre puisque f est injective et il est générateur de $Im(f \circ g)$ car si $y \in Im(f \circ g)$, on peut écrire $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sum_i \alpha_i g(v_i)) = \sum_i \alpha_i f(g(v_i))$, donc $\{f(g(v_1)), ..., f(g(v_r))\}$ est une base de $Im(f \circ g)$, d'où $rang(g) = rang(f \circ g)$.

Proposition 4.0.34 . *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E')$. *Soient* $(e_1, ...e_n)$ *et* $(e'_1, ...e'_n)$ *deux bases quelconques de* E *et* E' *respectivement et* $A = M(f)_{e_i,e'_j}$. *On a alors* $rangf = rangA$. *Ainsi deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes ont même rang, en particulier deux matrices semblables ont même rang.*

Preuve. On considère le diagramme suivant :
$(\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{K}^p, \mathcal{B}')$

$(E, \mathcal{C} \rightarrow (E', \mathcal{C}')$
u et v sont définies de la facon suivante :
$u(f_j) = e_i$, $u(f'_j) = e'_j$ avec $\mathcal{B} = \{f_1, ..._n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}' = \{f'_1, ..., f'_p\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On a $h = v^{-1} \circ f \circ u$ et l'application h a precisément A comme matrice dans les bases canoniques car $h(f_i) = v^{-1} \circ f \circ u(f_i) = v^{-1}(f(e_i)) = v^{-1}(\sum_j a_{ji} e'_j) = \sum_j a_{ji} f'_j$ car $A = (a_{ij}) = M(f)_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$. D'où $A = M(h)_{f_i,f'_j}$ et donc $rang(A) = rang(h)$. Mais

d'après le lemme précédent $rang(h) = rang(v^{-1} \circ f \circ u) = rang(f \circ u) = rang(f)$.

Matrices remarquables

1. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
2. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i \leq j$.
3. La transposée d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice notée $A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$. De plus on a les propriétés suivantes faciles à établir :
   (a) $A^{t^t} = A$, $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ et $(AB)^t = B^t A^t$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (b) L'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui associe à A sa transposée A^t est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 4.0.35 . *Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $B = Q^{-1}AP$. C'est en fait une relation d'équivalence sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Lemme 4.0.36 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a*

$$rang(A) = r \iff A \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. $\Longleftarrow$ *trivial.*
$\Longrightarrow$ *$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définit une application linéaire $\phi : (\mathbb{K}^p, e_i) \to (\mathbb{K}^n, e'_j)$. On munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ des bases canoniques $\{e_1, ..., e_p\}$ et $\{e'_1, ..., e'_n\}$ respectivement. Soit r le nombre de vecteurs linéairement indépendents parmi les images des vecteurs de la base $\{e_1, ..., e_p\}$;*

càd $Ae_1, ..., Ae_p$*, qu'on peut supposer être* $Ae_1, ..., Ae_r$*, les autres* $Ae_{r+1}, ..., Ae_p$ *peuvent s'exprimer en fonction de ces derniers :*

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{j=r} c_{kj} Ae_j, \text{ pour } k = r+1, ..., p$$

On définit une nouvelle base $f_1, ..., f_p$ *dans* $I\!K^p$*, comme suit :*

$$f_k = e_k, \text{ pour } \ k = 1, ..., r \text{ et } \ f_k = e_k - \sum_{j=1}^{j=r} c_{kj} e_j, \text{pour } k = r+1, ...p$$

On a alors $Af_k = 0$ *pour* $k = r+1, ..., p$*. Posons alors* $Af_j = t_j$ *pour* $j = 1, 2, ...r$*.*
Les t_j *sont par hypothèse linéairement indépendents. Complétons les pour obtenir une base de* $I\!K^n$*, disons* $t_{r+1}, ..., t_n$*. Considérons alors la matrice de l'application linéaire* ϕ *dans les nouvelles bases* $\{f_1, ...f_p\}$ *et* $\{t_1, ..., t_n\}$*, on a alors :*

$$M(\phi)_{f_i,t_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r.$$

A et $M(\phi)_{f_i,t_j}$ *représentent la même application linéaire, et sont donc équivalentes.*

Théorème 4.0.37 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{np}(I\!K)$*. A et B sont équivalentes si et seulement si* $rang(A) = rang(B)$*.*

Preuve. $\Rightarrow$ *trivial*
$\Leftarrow$ *Si* $rang(A) = rang(B) = r$*, alors d'après le lemme précédent A est équivalente à* J_r *et de même B est équivalenteà* J_r*, et par suite A est équivalente à B.*

Théorème 4.0.38 *. Soit* $A \in \mathcal{M}_{np}$*, alors* $rang(A) = rang(A^t)$*. C'est à dire que le rang d'une matrice A est aussi la dimension de l'espace engendré par les vecteurs lignes de la matrice A.*

Preuve. Supposons que $rang(A) = r$*, donc* A *est équivalente à* J_r *et par suite il existe* $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles telles que* $A = Q^{-1}J_rP$*. Donc* $A^t = P^tJ_r^t(Q^{-1})^t = (P^{-1^t})^{-1}J_r(Q^{-1})^t = (P^{-1^t})^{-1}J_r(Q^{-1})^t$ *car* J_r *est symétrique, d'où* A^t *est équivalente à* J_r *et donc* $rang(A^t) = r = rang(A)$*.*

Exemples 4.0.39 *Déterminons le rang de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

On utilise les opérations élémentaires sur les lignes :

On a $rang(A) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}) = rang(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$*. Les deux vecteurs lignes sont libres, d'où le rang de A est égal à 2.*

Chapitre 5

Valeurs propres et vecteurs propres

5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1.1 . *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $dimE = n \geq 1$. On appelle de vecteur propre de f tout vecteur $x \in E$ tel que $f(x)$ soit colinéaire à x i.e $\exists \lambda \in I\!K$, tel que $f(x) = \lambda x$.*

. Comme $f(0) = 0$, le vecteur nul est toujours un vecteur propre et de plus pour tout scalaire $\lambda \in I\!K$ on a $f(0) = \lambda 0$. Mais si x est un vecteur propre non nul, alors le scalaire λ est unique. En effet si $f(x) = \lambda x = \mu x, alors (\lambda - \mu)x = 0$ et donc $\lambda = \mu$.

Définition 5.1.2 . *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in I\!K$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur propre $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On dit que x est un vecteur propre de f associé à λ.*

Exemples 5.1.3 .

1. *Soit E un $I\!K$-espace vectoriel et $h_\lambda : E \to E$ l'homothétie de rapport λ i.e $h_\lambda(x) = \lambda x$. Il est clair que tout vecteur de E est un vecteur propre et λ est la seule valeur propre.*
2. *Supposons $dimE = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M(f)_\mathcal{B}$ soit diagonale i.e $M(f)_\mathcal{B} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Alors chacun des vecteurs e_i da la base est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i*

Notations 5.1.4 *. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in I\!K$, on définit l'ensemble*

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda id_E).$$

On a ainsi $x \in E_\lambda \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x$. Ainsi λ est une valeur propre de f si et seulement si $E_\lambda \neq \{0\}$. D'autre part E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5.1.5 *. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in I\!K$. On a*

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0\}.$$

Si λ est une valeur propre , alors $E_\lambda \neq \{0\}$ s'appelle sous-espace proopre asocié à la valeur propre λ.

Définition 5.1.6 *. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de f et on note $Spect(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.*

5.2 Propriétés des valeurs propres et vecteurs propres

Proposition 5.2.1 *. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $dimE = n$ et $\lambda \in I\!K$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *λ valeur propre de f.*
2. *$E_\lambda \neq \{0\}$*
3. *$f - \lambda id_E$ n'est pas injective*
4. *$f - \lambda id_E$ n'est pas bijective*
5. *$det(f - \lambda id_E) = 0$ i.e ($det(M(f - \lambda id_E)_\mathcal{B}) = 0$ où $\mathcal{B}$ est une base de E)*

Proposition 5.2.2 *. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors*

1. *Si λ et μ sont deux valeurs propres de f distinctes, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$*
2. *Si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres de f distinctes deux à deux, alors la somme $E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_p}$ est directe*

Preuve. 1) Il est clair que si $f(x) = \lambda x = \mu x$, alors $(\lambda - \mu)x = 0$, et ainsi $x = 0$. Pour 2) elle se fait par recurrence sur l'entier p.

5.3 Polynôme caractéristique

Correspondance

Remarques 5.3.1 *Soient* $f \in \mathcal{L}(E)$, $dimE = n \geq 1$, $\mathcal{B}$ *une base de* E. *Soient* $x \in E$, X *le vecteur colonne de* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *et* $A = M(f)_{\mathcal{B}}$. *On a*

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda X$$

Définition 5.3.2 . *Soient* $n \geq 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$.

1. *On appelle vecteur propre de* A *tout vecteur colonne* X *(à* n *lignes) tel qu'il existe un scalaire* $\lambda \in I\!K$ *:*
$$AX = \lambda X.$$
2. *On appelle valeur propre de* A *tout scalaire* $\lambda \in I\!K$ *tel qu'il existe un vecteur colonne* $X \in \mathcal{M}_{n1}(I\!K)$, $X \neq 0$, *tel que*
$$AX = \lambda X.$$

Proposition 5.3.3 . *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$, $\lambda \in I\!K$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. λ *valeur propre de* A
2. $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible*
3. $det(A - \lambda I_n) = 0$

Définition 5.3.4 . *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$. *On appelle polynôme caractéristique de* A *et on note* $P_A(X)$ *le polynôme* $P_A(X) = det(A - XI_n)$.

Remarques 5.3.5 . *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$.

1. *Les valeurs propres de* A *sont les racines du polyôme caratéristique* $P_A(X) = det(A - XI)$.
2. *Si* λ *est une valeur propre de* A, *alors* $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n1} \ / \ (A - \lambda I_n)X = 0\}$ *est le sous-espace propre associé à* λ.

Proposition 5.3.6 . *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(I\!K)$. Alors le polynôme caratéristique de A est un polynôme de degré n, plus précisément :*

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{(n-1)} TrAX^{n-1} + ...detA.$$

où $TrA = a_{11} + ... + a_{nn}$

Exemples 5.3.7 .

1. *Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on a $P_A(X) = det(A - XI_2)$= (a-X)(d-X)-cb= $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$*
2. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $P_A(X) = det(A - XI) = (1 - X)^2$, donc A admet une seule valeur propre $\lambda = 1$. Déteminons les vecteurs propres de A associé à $\lambda = 1$ càd E_1. On a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow 2y = 0$, donc $E_1 = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 0))$*